

АППРОКСИМАЦИЯ СИГНАЛОВ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ШУМОВ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Санкт-Петербургский Государственный университет аэрокосмического приборостроения
Кафедра компьютерных систем автоматизации
190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, тел./факс (812) 315-49-67
E-mail: georgkupr@mail.ru

Сложные сигналы, не имеющие простых изображений по Лапласу, могут быть разложены в ряд Тейлора (временной ряд). Аппроксимация сигналов рядом экспонент, предложенная В. Б. Михайловым, сводится к преобразованию времени вида $t = a^{-1} \ln x$, $x = e^{at}$ при разложении во временной ряд. Она не вносит вычислительных шумов, поскольку искомые коэффициенты ряда при их вычислении не зависят от результатов вычисления других, как показано в [1]. В работе [2] приведены формулы разложения вплоть до 8 порядка, полученные вручную. Здесь мы имеем дело с фильтром, устраняющим вычислительные шумы в аналитических преобразованиях, и, в частности, в обратных преобразованиях Лапласа. Аппроксимируемый сигнал рассматривается далее как сложная функция $Z(x(t))$.

В настоящем докладе приведено решение задачи вывода и расчёта производных на примере частотно-модулированного сигнала [3] вплоть до заданного порядка двумя способами, а также дано краткое описание разработанного программного обеспечения.

Выражение производной n-го порядка сложной функции $z(x(t))$ через частные производные: итеративные формулы вывода

Установим сначала общий вид выражения производной n-го порядка через частные производные. Правило дифференцирования сложной функции даёт выражение для первой производной: $z' = z'_x x'$. Сделаем замену $x' = \beta_{11}$ и получим вторую, третью и четвертую производные, дифференцируя произведения двух функций [4]:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= z''_{xx} \dot{x} \beta_{11} + z'_x \dot{\beta}_{11} = z''_{xx} \beta_{22} + z'_x \beta_{21} \\ z^{(3)} &= z_x^{(3)} \dot{x} \beta_{22} + z''_{xx} (\dot{\beta}_{22} + \dot{x} \beta_{21}) + z'_x \dot{\beta}_{21} = z_x^{(3)} \beta_{33} + z''_{xx} \beta_{32} + z'_x \beta_{31} \\ z^{(4)} &= z_x^{(4)} \dot{x} \beta_{33} + z_x^{(3)} (\dot{\beta}_{33} + \dot{x} \beta_{32}) + z''_{xx} (\dot{\beta}_{32} + \dot{x} \beta_{31}) + z'_x \dot{\beta}_{31} = \\ &= z_x^{(4)} \beta_{44} + z_x^{(3)} \beta_{43} + z''_{xx} \beta_{42} + z'_x \beta_{41}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем индуктивно записать производную сложной функции $z(x(t))$ в общем виде

$$z^{(n)} = \sum_{j=1}^n z_x^{(j)} \beta_{nj}, \quad (1)$$

и сформировать рекуррентные соотношения

$$\beta_{n+1; j} = \dot{\beta}_{nj} + \dot{x}\beta_{n; j-1}, \quad j = \overline{2, n},$$

$$\beta_{n+1; n+1} = \dot{x}\beta_{nn} = \dot{x}^n, \quad \beta_{n+1; 1} = \dot{\beta}_{n1} = x^{(n)}. \quad (2)$$

Данные соотношения позволяют нам вывести производную сложной функции в аналитическом виде на ЭВМ. Мы имеем возможность автоматически упрощать получаемые в процессе дифференцирования выражения β_{nj} , которые, очевидно, являются линейными комбинациями произведений производных от x разных порядков и в разных степенях.

Выражение производной n -го порядка ЧМ-сигнала через частные производные

Рассмотрим теперь частный случай дифференцирования сложной функции применительно к ЧМ-сигналу:

$$z(t) = \sin(\omega_H t + \varphi_H + m \cdot \sin(\omega_m t + \varphi_m)). \quad (3)$$

Воспользуемся преобразованием времени $t = a^{-1} \ln x$ и перепишем (3) в виде:

$$\begin{aligned} Z(x) &= \sin v, & v &= \gamma_H + m \sin \gamma_m \\ \gamma_H &= k_H \ln x + \varphi_H, & \gamma_m &= k_m \ln x + \varphi_m \\ k_H &= \omega_H a^{-1}, & k_m &= \omega_m a^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что мы имеем дело с функцией вида $Z(v(x))$. Производная n -го порядка функции $v(x)$ в принятых обозначениях имеет вид:

$$v^{(n)}(x) = x^{-n} \left(k_H (-1)^{n-1} (n-1)! + m k_m (V_n(k_m) \cos \gamma_m + U_n(k_m) \sin \gamma_m) \right) \quad (5)$$

Здесь $V_n(k)$ и $U_n(k)$ – полиномы, вычисляются по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} V_{n+1}(k) &= kU_n(k) - nV_n(k); & U_{n+1}(k) &= -nU_n(k) - kV_n(k); \\ V_1(k) &= 1, & U_1(k) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Производная n -го порядка ЧМ – сигнала выводится по формулам:

$$Z^{(n)}(x) = G_n \sin v + H_n \cos v, \quad (7)$$

где G_n и H_n – полиномы от степеней производных v – вычисляются также по рекуррентным соотношениям (точками обозначено дифференцирование по x):

$$G_{n+1} = \dot{G}_n + \dot{v} H_n, \quad H_{n+1} = \dot{H}_n - \dot{v} G_n, \quad G_1 = \dot{v}, \quad H_1 = 0. \quad (8)$$

Работа с формулами (1), (2), (7) и (8) требует большого числа алгебраических преобразований, поэтому для вывода $Z^{(n)}(v(x))$ разработана специальная программа.

Альтернативный метод вычисления производных $\sin(v(x))$

Другой способ вычисления G_n и H_n позволяет обойтись без предварительного вывода и упрощения выражений для производных и в то же время даёт возможность достаточно быстро рассчитывать их численные значения. Ниже представлены формулы, по которым строится рекурсия вида $(G_n, H_n) \leftarrow (g_k^{(n)}, h_k^{(n)}, G_k^{(n-1)}, H_k^{(n-1)})$, $k=1 \dots n-1$:

$$G_n = \rho_{n-1} + \rho H_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} h_k^{(n-1-k)}, \quad H_n = -\rho G_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} g_k^{(n-1-k)}, \quad \rho = \dot{v} \quad (9)$$

$$g_k^{(q)} = (\rho G_k)^{(q)} = \sum_{j=0}^q C_q^j \rho^{(j)} G_k^{(q-j)}, \quad h_k^{(q)} = (\rho H_k)^{(q)} = \sum_{j=0}^q C_q^j \rho^{(j)} H_k^{(q-j)} \quad (10)$$

$$\begin{cases} G_k^{(i)} = G_{k+1}^{(i-1)} - h_k^{(i-1)}, & H_k^{(i)} = H_{k+1}^{(i-1)} + g_k^{(i-1)}, \\ g_k^{(0)} = \rho G_k, & h_k^{(0)} = \rho H_k; \quad H_1^{(i)} = 0, \quad G_1^{(i)} = \rho^{(i)}, \quad h_1^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (11)$$

В выражениях (9)-(11) верхние индексы в скобках означают дифференцирование по x , но реально никакого вывода производных не происходит; поэтому в составленном вычислительном алгоритме g, h, G, H истолковываются как матрицы, не все элементы которых задействованы в вычислениях. Таким образом, дифференцирование заменено использованием рекурсии, притом без приближенных вычислений. Вывод указанных выше выражений здесь не приводится из-за громоздкости.

Разложение информационной составляющей ЧМ-сигнала в ряд экспонент

Теперь, когда решена проблема вывода и вычисления производных, запишем формулу для разложения ЧМ-сигнала в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$, предложенного в статье [1], вернувшись к старым обозначениям:

$$z^*(t) = \sin(\varphi_H + m \sin \varphi_m) + \sum_{j=1}^n (e^{at} - 1)^j (j!)^{-1} Z^{(j)}(1). \quad (12)$$

Аналогично раскладывается в ряд информационная составляющая ЧМ-сигнала, ниже приведены формулы для самой составляющей (13), для её производной порядка n (14) и для полученного разложения (15):

$$y(t) = z(t) - \sin(\omega_H t + \varphi_H), \quad (13)$$

$$Y^{(n)}(x) = Z^{(n)}(x) - x^{-n} \kappa_H (V_n(\kappa_H) \cos \gamma_H + U_n(\kappa_H) \sin \gamma_H), \quad (14)$$

$$y^*(t) = \sin(\varphi_H + m \sin \varphi_m) - \sin \varphi_H + \sum_{j=1}^n (e^{at} - 1)^j (j!)^{-1} Y^{(j)}(1). \quad (15)$$

Краткое описание программ

Для вывода производных и аппроксимации ЧМ-сигналов разработаны программы, работающие под управлением операционных систем Windows 2000/XP.

Программа KSoft RMaker позволяет вывести выражения производных n -го порядка сложных функций $z(x(t))$ и $\sin(x(t))$ через частные производные соответственно по формулам (1)-(2) и (7)-(8); выдаёт результаты работы в трёх форматах: текст, HTML и исходный код на языке C (рис. 2).

Программа KSoft FMApprox (рис. 1) предназначена для аппроксимации информационной составляющей ЧМ-сигналов изложенными методами и оценки её точности. Использует результат работы KSoft RMaker для $\sin(x(t))$ вплоть до 22-го порядка. Производит вычисления по формулам (3)-(6), (9)-(15). Обладает программным интерфейсом автоматизации; выдаёт результаты работы в виде файлов форматов HTML, XML, CSV и в виде графиков.

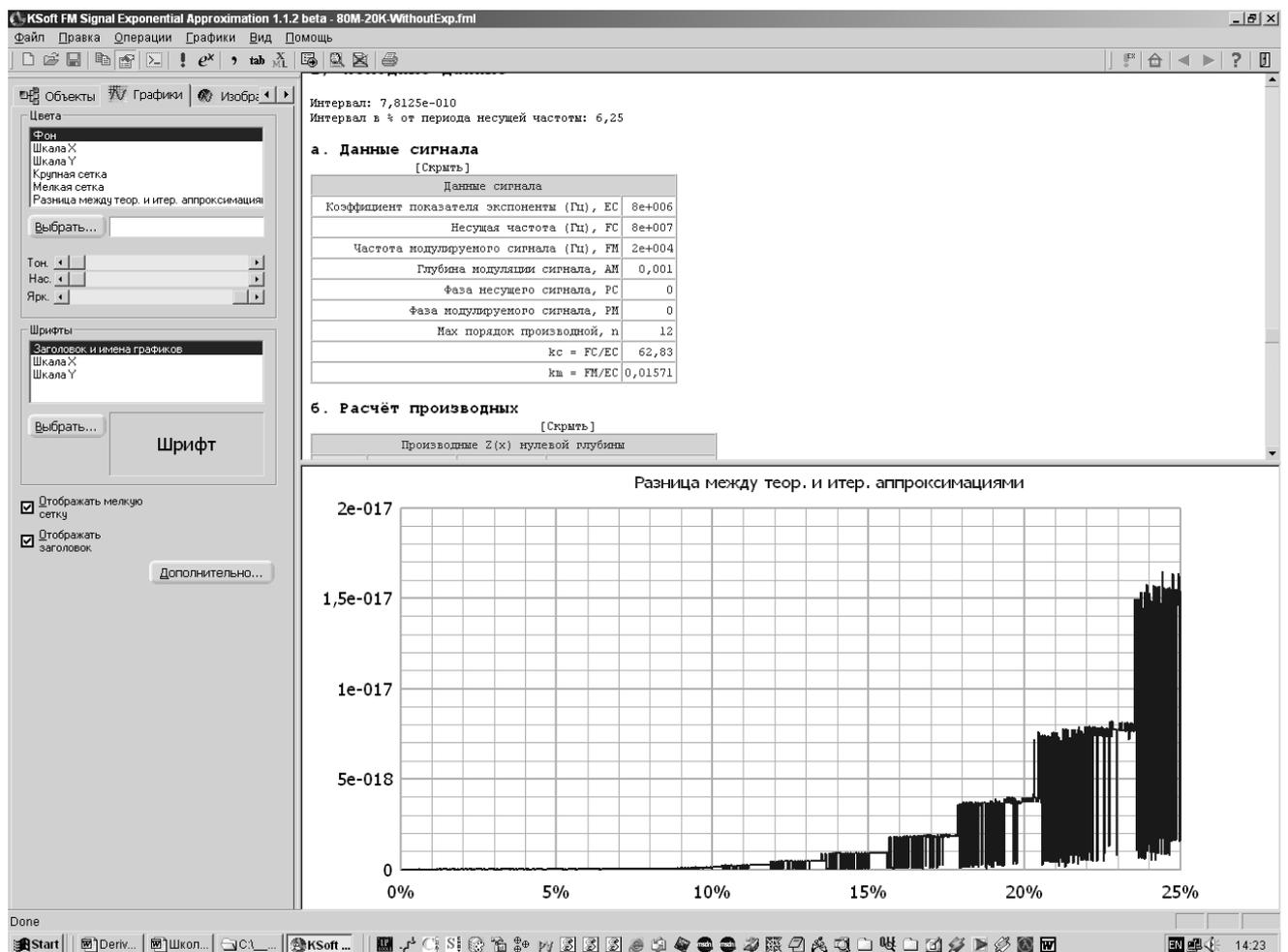


Рис. 1 Снимок с экрана работающей программы FMApprox.

```

...
/// Производная 3
R[2] = ( - x[0][2] + x[2][0]) * cos_v -3.0*x[0][0]*x[1][0] * sin_v;
/// Производная 4
R[3] = ( - 6.0*x[0][1]*x[1][0] + x[3][0]) * cos_v + (x[0][3] - 3.0*x[1][1] -
4.0*x[0][0]*x[2][0]) * sin_v;
/// Производная 5
R[4] = (x[0][4] - 15.0*x[0][0]*x[1][1] - 10.0*x[0][1]*x[2][0] + x[4][0]) * cos_v +
(10.0*x[0][2]*x[1][0] - 10.0*x[1][0]*x[2][0] - 5.0*x[0][0]*x[3][0]) * sin_v;
...

```

Рис. 2 Отрывок исходного кода на языке С для вычисления производных ЧМ-сигнала как сложной функции, сгенерированного программой RMaker (показаны производные 3-5 порядков)

Результаты вычислительных экспериментов

Максимальный порядок производной n , коэффициент показателя экспоненты a и интервал аппроксимации τ мы выбираем таким образом, чтобы максимальная ошибка аппроксимации ε_{\max} не превышала заданной ошибки ε . Неплохие результаты получены при $a \sim \omega_H$, $n=6\dots 12$, $\tau = (1/16\dots 1/32) \cdot 2\pi/\omega_H$. Так, для ЧМ-сигнала с параметрами $\omega_H = 80$ МГц, $\omega_m = 20$ КГц, $m = 0,001$, получены оптимальные значения $\varepsilon_{\max} = 9,9 \cdot 10^{-10}$, $\tau = 3,36\%$ от периода $2\pi/\omega_H$ несущей частоты, $n = 5$, $a = 1.17 \cdot \omega_H$. При этом использовались следующие условия: заданная допустимая погрешность аппроксимации информационной составляющей ЧМ-сигнала $\varepsilon = 10^{-9}$; интервалы аппроксимации: от 3,125% до 6,25% периода несущей частоты; было задано 2000 точек в интервале поиска. Это решение проиллюстрировано в статье [1].

Теперь о сравнении методов получения производных. Несмотря на принципиальное различие, оба метода дают практически одинаковые результаты. Опыты показали, что разность двух соответствующих аппроксимированных сигналов на несколько порядков ниже, чем ошибка аппроксимации. Эта разница имеет характер совсем незначительного вычислительного шума (рис. 1).

Литература

1. Михайлов В.Б. Реализация алгебраического подхода к моделированию систем с частотной модуляцией // Техника, экономика. Сер. Автоматизация проектирования / ВИМИ, 1995. - Вып. 3-4. - С. 36-47.
2. Михайлов В.Б., Михайлов К.В., Храпонов А.Н. Катастрофические вычислительные шумы в аналитическом интегрировании (обратных преобразованиях Лапласа) сложных сигналов. Их ликвидация на основе специального преобразования времени. // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ.-2000.-Т. VIII.-Вып.3-4.- С.72-88.
3. Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Куприянов Г.А., Михайлов К.В. Численно-аналитические методы решения сверхжестких дифференциально-алгебраических систем уравнений: проблемы реализации, феномен сверхжесткости, вычислительные шумы в аналитических преобразованиях и методы их устранения.//Математическое моделирование, 2002. 29 с. (в печати).
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 – М.: Гостехиздат, 1947.